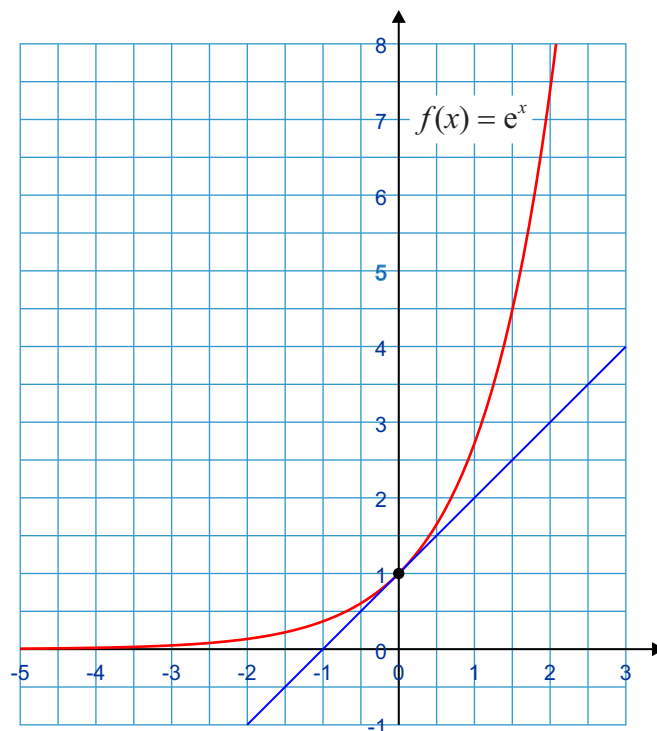


Differentiation af den naturlige eksponentialfunktion

Vi skal i dette tillæg se, hvordan man differentierer den naturlige eksponentialfunktion e^x , undertiden også betegnet $\exp(x)$. Grunden til, at denne specielle eksponentialfunktion med grundtallet $e = 2,7182818\dots$ kaldes *naturlig* er, at den er sin egen differentialkvotient!



Sætning

Den naturlige eksponentialfunktion $f(x) = e^x$ er differentiabel for alle $x \in \mathbb{R}$ med differentialkvotient $f'(x) = e^x$.

Bevis: Vi skal ikke bevise sætningen fuldstændigt, da det er lidt kompliceret. Vi vil derimod bevise den ud fra den antagelse, at vi allerede ved, at funktionen er differentiabel i $x_0 = 0$ med differentialkvotient lig med 1, altså at hældningen af tangenten i punktet $(0, 1)$ på grafen er 1, som illustreret på figuren ovenfor. Med denne ekstra antagelse ved vi altså, at *differenskvotienten* i $x_0 = 0$ har grænseværdien 1, når $\Delta x \rightarrow 0$:

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1 \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Vi vil nu udnytte blandt andet *potensregnereglerne* til at finde differentialkvotienten for funktionen i et vilkårligt valgt punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Vi starter derfor med at opskrive et udtryk for differenskvotienten i punktet x_0 :

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$$

hvor vi i tredje lighedstegn har udnyttet potensregnereglen $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. I fjerde lighedstegn har vi faktoriseret i tælleren, dvs. sat e^{x_0} udenfor parentes. Denne faktor er så samtidigt sat helt ud foran brøken. Vi har dermed gennemført trin 1 og 2 i *tretrinsreglen*. I trin 3 skal vi undersøge, hvad der sker med differenskvotienten, når Δx går mod 0. Hertil observerer vi, at vi netop fra (1) ved hvad parentesen i (2) går mod, nemlig 1. Vi har altså:

$$(3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) \rightarrow e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Bemærk her, at e^{x_0} er fast, når $\Delta x \rightarrow 0$. (3) viser altså, at differenskvotienten i det vilkårlige punkt x_0 nærmer sig til e^{x_0} , når $\Delta x \rightarrow 0$. Dermed har vi vist, at f er differentiable i x_0 med differentialkvotient $f'(x_0) = e^{x_0}$. Det ønskede er dermed vist. □

Bemærkning 1

Prøv eventuelt i dit CAS-værktøj at verificere, at $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1$ for $\Delta x \rightarrow 0$

Bemærkning 2

Man ser ofte den naturlige eksponentialfunktion anvendt i matematiske modeller. En eksponentiel udvikling er som bekendt på formen $f(x) = b \cdot a^x$, men den kan også skrives på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$, hvor $a = e^k \Leftrightarrow k = \ln(a)$. En af grundene til at sidstnævnte ofte foretrækkes til beskrivelse af konkrete modeller er, at man kan anvende den med *enheder*. Som et godt eksempel kan nævnes den eksponentielle model for *radioaktivt henfald*: $A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, hvor $A(t)$ er kildens aktivitet til tidspunktet t , A_0 er aktiviteten til tiden 0 og k er *henfaldskonstanten*. For det radioaktive stof Cæsium-137 er henfaldskonstanten lig med $k = 0,02297 \text{ år}^{-1}$. Antag startaktiviteten er 200 kBq. Hvis man ønsker kildens aktivitet efter for eksempel 12 år, så kan man indsætte tiden med enhed:

$$A(12 \text{ år}) = 200 \text{ kBq} \cdot e^{-0,02297 \text{ år}^{-1} \cdot 12 \text{ år}} = 200 \text{ kBq} \cdot e^{-0,2757} = 200 \text{ kBq} \cdot 0,7590 = 152 \text{ kBq}$$

Man ser, at $k \cdot t$ bliver et rent tal, som det skal være. Det er ikke muligt direkte at inkorporere enheder i den anden version, $f(t) = b \cdot a^t$. Her ville grundtallet afhænge af enheden, og man er nødt til at undlade enheden i værdien for t – den er nødt til at være underforstået.

En anden god ting ved formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ er, at den er let at differentiere:

$$f'(x) = (b \cdot e^{k \cdot x})' = b \cdot (e^{k \cdot x})' = b \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$$

Vi slutter her. □